БИЛЕТ №29

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В RLC КОНТУРЕ. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ АМПЛИТУДА-ФАЗА. РЕЗОНАНС.

Вынужденные колебания в RLC контуре

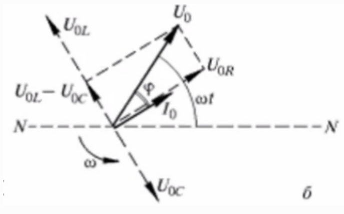
Рассмотрим схему из последовательно подключенных катушки, конденсатора, сопротивления и источника синусоидального сигнала. Если мы подадим на источник сигнал, то схема начнет совершать вынужденные колебания с частотой источника. По правилам Кирхгоффа можно записать уравнение для суммарного напряжения на контуре для заряда (L — индуктивность катушки, R — сопротивление, C — емкость конденсатора, U_0 — амплитуда напряжения, w — угловая скорость):

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cdot cos(wt) \qquad (1)$$

Здесь, аналогично со свободными колебаниями, коэффициент $\frac{R}{L}$ можно назвать 2γ, но он здесь потеряет свой изначальный смысл, так как при вынужденных колебаниях с фиксированной амплитудой затухания происходить не может. Он также не может влиять на реальную угловую частоту, так как она также фиксирована.

Диаграммы амплитуда-фаза

Удобно построить векторную фазовую диаграмму для каждого из напряжений. Напряжение на резисторе совпадает с током, напряжение на конденсаторе совпадает с зарядом, который интеграл от тока, то есть отстает на $\frac{\pi}{2}$ (производная синусоиды), на катушке — совпадает с производной тока по времени, то есть опережает на $\frac{\pi}{2}$ (аналогично). В сумме три вектора должны давать напряжение на источнике. Таким образом, можно построить следующую фазовую диаграмму:



Напряжение на катушке и на конденсаторе противоположны по фазе, то есть их сумма — просто их разность. Проекции этой суммы, напряжения на резисторе и на источнике должны давать ноль, следовательно,

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2 \tag{2}$$
$$U_0^2 = (RI)^2 + (L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C})^2$$

Так как

$$I_0 cos(wt) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU_c)}{dt} = C\frac{dU_c}{dt} \tag{3}$$
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} I_0 cos(wt)$$
$$U_C = \frac{1}{wC} I_0 sin(wt)$$
$$U_{0C} = \frac{1}{wC}$$

Аналогично для катушки

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = U_L \tag{4}$$
$$L\frac{d(I_0 \cdot cos(wt))}{dt} = U_L$$
$$U_L = LwI_0 \cdot sin(wt)$$
$$U_{0L} = Lw \cdot I_0$$

Тогда

$$U_0^2 = I^2R^2 + (\frac{1}{wC} - wL)^2 I^2 \tag{5}$$
$$I_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{wC} - wL)^2}}$$

Резонанс

Определим резонанс как явление, при котором достигается максимальный ток. Понятно, что если мы рассматриваем зависимость от частоты, то наша задача — минимизировать слагаемое в знаменателе амплитуды $(\frac{1}{wC} - wL)^2$, тогда минимум при $\frac{1}{wC} = wL; w = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, что совпадает с частотой свободных колебаний такого же контура без источника. С другой стороны, если рассматривать резонанс напряжения на конденсаторе, то оно будет отличным от резонанса тока:

$$U_C = \frac{1}{wC} I_0 = \frac{1}{wC}\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{wC} - wL)^2}} = \frac{\frac{\varepsilon}{C}}{\sqrt{w^2R^2 + (\frac{1}{C} - w^2L)^2}} = \frac{\frac{\varepsilon}{LC}}{\sqrt{4w^2\gamma^2 + (w_0^2 - w^2)^2}} \tag{15}$$

Для заряда

$$q = \frac{\frac{\varepsilon}{L}}{\sqrt{4w^2\gamma^2 + (w_0^2 - w^2)^2}} \tag{7}$$

Резонанс достигается, когда знаменатель достигает минимума. Можно аккуратно все раскрыть, взять производную и получить, что $w_{\text{резонанса}} = \sqrt{w_0^2 - 2\gamma^2}$.

Импедансы

Можно ввести комплексные напряжения для удобства так, чтобы вещественной части соответствовали реальные напряжения, а мнимая была такой, чтобы вектор напряжения попадал в нужную фазу. После этого, например, напряжение на конденсаторе можно записать как

$$\bar{U}_c = \frac{1}{iwC} I_0 e^{iwt} \tag{8}$$

Множитель $\frac{1}{i} = -i$ соответствует отставанию на 90°. Тогда можно сказать, что импеданс катушки — $\frac{1}{iwC}$. Его можно подставить в закон Ома и получить правильный ответ. Аналогично для катушки:

$$\bar{U}_L = iwL \cdot I_0 e^{wt} \tag{9}$$

множитель i — поворот на 90° вперед. Отсюда импеданс — iwL.

> Прямой вывод (с конденсатором аналогично, только нужно дифференцировать вместо интегрирования). Рассмотрим синусоидальное напряжение на катушке. Пусть у нас напряжение записывается в виде $\bar{U} = U_0 e^{-iwt} = U_0 cos(wt) + U_0 sin(wt)$. Тогда:

$$\begin{gathered} U_0 e^{iwt} = L\frac{dI}{dt} \\ \bar{I} = \int \frac{U_0 e^{iwt}}{L} dt = \frac{U_0}{iwL} \cdot e^{iwt} = \frac{\bar{U}}{iwL} \end{gathered} \tag{10}$$

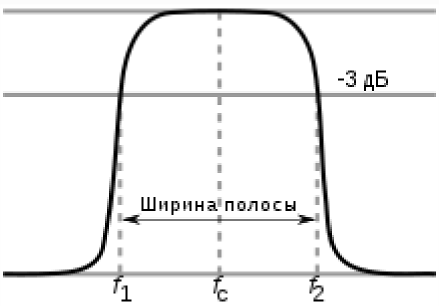
> Таким образом, импеданс катушки равен iwL.

Добротность

При этом появляется такой показатель, как добротность системы, который можно определить двумя далекими друг от друга по смыслу путями: как отношение общей энергии системы к потере энергии за один радиан (E — энергия системы, ΔE — изменение за цикл)

$$Q = \frac{2\pi \cdot E}{\Delta E} \tag{11}$$

, а также как отношение угловой частоты резонанса к ширине области на графике амплитуды от угловой частоты, где амплитуда больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимальной (Δw — отклонение края ширины от w_0 (частоты резонанса)).



$$Q = \frac{w_0}{2\Delta w} \tag{12}$$

Докажем эквивалентность определений, и заодно выведем формулу для вынужденных колебаний. По первому:

$$\Delta E = \int_0^T I^2 R\, dt = \int_0^T (I_{max} \cdot sin(wt))^2 R\, dt = \tag{13}$$

$$= I_{max}^2 R \int_0^T (sin(wt))^2\ dt = I_{max}^2 R \cdot \frac{T}{2}$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{LI_{max}^2}{2}}{RI_{max}^2 \frac{T}{2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Выведем из второго. По формуле амплитуды тока (5) значение $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ достигается, когда $\frac{1}{wC} - wL = R$, то есть

$$\begin{aligned} &LC\, w^2 + RC\, w - 1 = 0 \\ &w = \frac{\pm\sqrt{R^2C^2 + 4LC} - RC}{2LC} \\ &\Delta w = \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \approx \frac{R}{2L} \\ &Q = \frac{w_0}{2\Delta w} \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \tag{14}$$

Например, в контуре в радио добротность ~1 000 (иногда 2 000 - 3 000).