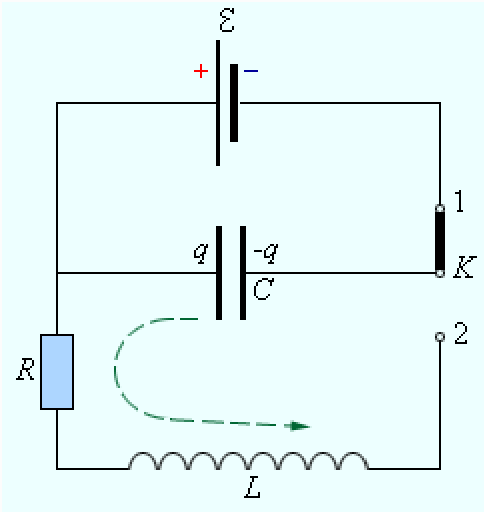
СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В RLC КОНТУРЕ.

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ КОЛЕБАНИЙ.



Изначально, например, конденсатор заряжен.

В качестве параметра будем рассматривать заряд на конденсаторе.

Тогда напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{c}$$

Напряжение на резисторе

$$U_R = I \cdot R = R \cdot \frac{dq}{dt}$$

Напряжение на катушке по закону ЭМИ Фарадея

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$$

По закону Кирхгоффа

$$U_C + U_R + U_L = 0$$

$$\frac{q}{c} + R \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$q + c \cdot R \cdot \frac{dq}{dt} + c \cdot L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{1}{LC} \cdot q + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

Назовём коэффициент

$$\frac{R}{L} = 2\gamma$$

Заметим, что если

$$q(t) = e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

, где

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

То всё сходится, так как

$$\frac{dq(t)}{dt} = -e^{-\gamma t}(\gamma \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = e^{-\gamma t}((\gamma^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\gamma\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$

$$\frac{1}{LC} \cdot \left(e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)\right) + \frac{R}{L} \cdot \left(-e^{-\gamma t}(\gamma \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))\right) + \left(e^{-\gamma t}((\gamma^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\gamma\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))\right) = 0$$

(очевидно, там всё сокращается. В-в-уп даю!)

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ КОЛЕБАНИЙ

Если рассмотреть **LC**-колебательный_контур, заметим, что

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{c \cdot U_c^2}{2} = \frac{L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}{2} + \frac{q^2}{2c}$$

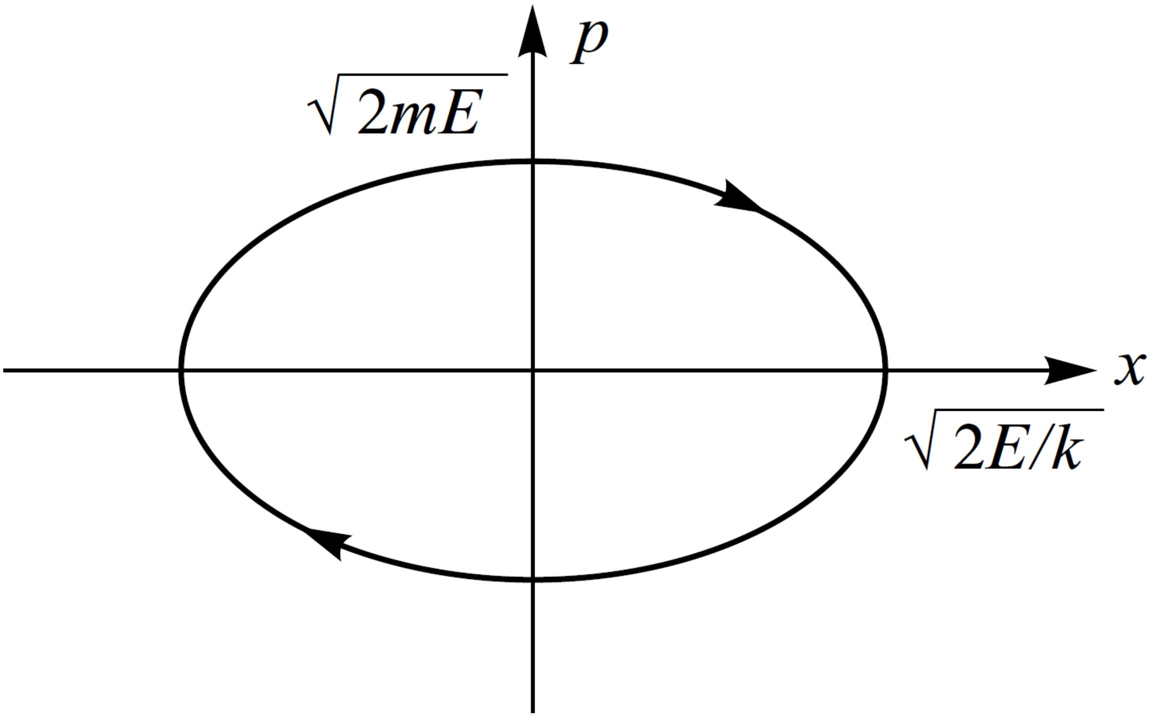
$$\frac{L \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}{2W} + \frac{q^2}{2Wc} = 1$$

$$\left(\frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{\frac{2W}{L}}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{2cW}}\right)^2 = 1$$

Фазовым портретом системы, параметризуемой одной степенью свободы, является картина зависимости производной параметра системы от его самого при заданной энергии.

В данном случае это зависимость тока от заряда, являющаяся ***эллипсом*** с полуосями

$$\sqrt{\frac{2W}{L}} \; \&\& \; \sqrt{2cW}$$



Выглядит этот фазовый портрет столь же красиво сколь и этот, для маятника, только, только с другими осями.

Понятно, что для **большей** *энергии* будет эллипс такой же формы, но **большего** *размера*.

Получается, что при добавлении в контур резистора, то есть при затухающих колебаниях, частица начинает двигаться по эллипсу с уменьшающимся со временем ~~радиусом~~ коэффициентом подобия исходному, так как энергия в системе потихоньку падает. Или не потихоньку. Это уж как пойдёт. Если контур такой ***Добротный***, то действительно потихоньку.