ВОПРОС №6.

ЭНЕРГИЯ ЗАРЯДОВ И ПОЛЕЙ. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ЭНЕРГИЯ КОНДЕНСАТОРА. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

Энергия системы зарядов

Рассмотрим два отдельных заряда, находящихся друг от друга на расстоянии r. По закону Кулона сила, с которой взаимодействуют два заряда:

$$F_{\text{кулона}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \tag{1}$$

При быстром перемещении, понятно, будут возникать электромагнитные волны, но нас интересует потенциальна энергия, при которой не создаются "лишние" магнитные поля, и перемещение может считаться квазистатическим. Работа, требуемая для перемещения с r на бесконечность будет (по модулю) :

$$A = \int\limits_{r}^{+\infty} F_{\text{кулона}} \cdot dx = \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{x^2} dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r} \tag{2}$$

Работа будет положительной, если заряды разного знака, и отрицательной — если одного. Важно понимать, что это работа, требуемая для разделения пары зарядов, и не может относиться только к одному из них. С другой стороны, мы можем зафиксировать один из зарядов, и работа останется точно такой же. Будем считать, что потенциальная энергия этих двух зарядов на бесконечности — ноль (определим ее так). Тогда потенциальная энергия на расстоянии r будет $E = -A$.

По принципу суперпозиции полей поле из каждого зарядов не влияет на поля, создаваемые другие. Тогда мы можем рассмотреть работу по любому квазистатическому перемещению как сумму перемещений всех пар (интеграл суммы равен сумме интегралов). Тогда энергия системы:

$$E_\Sigma = \sum_{\text{всех пар}} E_{\text{пары}} = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i \cdot q_j}{r} \tag{3}$$

Этим, в принципе, можно удовлетвориться, но еще есть следующее представление (не знаю, было ли оно у нас). Запишем энергию взаимодействия первого заряда со всеми остальными, второго и т.д.:

$$E_1 = \sum_{i \neq 1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i \cdot q_1}{r}$$
$$E_2 = \sum_{i \neq 2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i \cdot q_2}{r} \tag{4}$$
$$\dots$$

После чего сложим все выражения. Сумма будет по формуле (3) удвоенной общей энергией системы. Отсюда:

$$E_\Sigma = \frac{1}{2}\Big(q_1 \sum_{i \neq 1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r} + q_2 \sum_{i \neq 1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r} + \dots\Big) = \tag{5}$$
$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3 + \dots) = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

, где φ_i — поле, создаваемое всеми элементами, кроме i-ого.

Энергия конденсатора

Возьмем конденсатор емкостью C, и подключим его к батарее, на которой изначально нет напряжения. Затем будем плавно (квазистатически, напряжение на батарее всегда равно напряжению на конденсаторе) заряжать конденсатор до заряда q_0 и напряжения $U_0 = \frac{q}{C}$. Работа, требуемая для зарядки, будет по определению ЭДС (ε — ЭДС в момент времени):

$$A = \int_0^{q_0} \varepsilon \, dq = \int_0^{q_0} \frac{q}{C} \, dq = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{CU_0^2}{2} \tag{6}$$

Соответственно, считая незаряженный конденсатор имеющим нулевую энергию, потенциальная энергия и будет работой, требуемой для его зарядки, т.е. $E = A = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{CU_0^2}{2}$

Объемная плотность электрического поля

Будем рассматривать плоский конденсатор. В произвольном случае рассуждения в целом продолжают работать, но становятся сложнее (и на уроках мы это не обсуждали).

Воспользуемся полученной выше формулой для плоского конденсатора с диэлектрической проницаемостью ε, площадью S, расстоянием между обкладками d. Емкость для него будет:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \tag{7}$$

Если в плоском конденсаторе поле E (оно практически постоянно, т.к. обкладки очень большие по сравнению с толщиной, поле от бесконечной обкладки — постоянно), то напряжение на нем $U = \mathrm{E} \cdot d$, где d — толщина конденсатора. Энергия поля и будет энергией конденсатора, т.е.

$$E = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d \cdot \mathrm{E}^2}{2} = \mathrm{E}^2 \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \cdot V \tag{8}$$

Таким образом, объемная плотность — $\mathrm{E}^2 \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}$.