Вопросы к зачёту. Часть 1 (производная)

1. Задача о скорости, задача о касательной. Определение производной как предела. Примеры: производная x^n, скорость роста x^n, касательная к x^n. Связь существования производной и непрерывности в точке.

Задача о скорости — найти скорость тела, двигающегося с ускорением, в конкретный момент, зная формулу расстояния от времени.
Задача о касательной - «средняя скорость» изменения функции — мгновенная скорость.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{если существует}$$

$$x^n\colon \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n-x^n+nx^{n-1}\Delta x+(\Delta x)^2(\dots)}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

В чём разница производной и скорости роста?
$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;
$y=nx_0^{n-1}x-(n-1)x_0^n$
Если функция имеет производную в точке, то функция непрерывна в точке.
Доказательство: Очевидно.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0, \text{то есть предел значения в точке} = \text{значению в точке.}$$

Обратное неверно — пример — модуль.

2. Определение дифференцируемости функции в точке. Эквивалентность дифференцируемости и существования производной. Производная многочлена.

Не слишком формальное объяснение
Функция дифф. в x_0 — такая, которая „ведет себя почти как линейная" в $U(x_0)$.
$\exists\ g(x)=f(x_0)+k(x-x_0)$
$\Delta f=f(x)-f(x_0)$
$\Delta g=k\Delta x$
Хотим, чтобы „малое $\Delta g\approx$ малому Δf"
$\exists\ g(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ — кас. в (·) x_0
$\exists$ „погрешность"
$r(\Delta x)=\Delta f-\Delta g=$
$=\Delta f-f'(x_0)\Delta x$
Чтобы „$\Delta g\approx\Delta f$" нужно, чтобы $r(\Delta x)=o(\Delta x)$ при $x\to x_0$ (т.е. $\Delta x\to 0$)
Нужно, чтобы по опр. $o(f)$: $r(\Delta x)=\Delta x\cdot\varepsilon(x)$ — где $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to x_0$

$$\varepsilon(x)=\frac{r(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=$$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = 0$

— по опр. произв.

(т.е. $r(\Delta x) = o(\Delta x)$)

Значит, у касательной будет действительно чертовски малая погр.

Опр.: f — дифф. в x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$ и $\beta(\Delta x)$:

$\beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$;

$\Delta f = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$

P.S. $\beta(\Delta x) \cdot \Delta x = \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}$

Т.: f имеет $f'(x_0) \Leftrightarrow f$ дифф. в x_0:

Д-во:

„$\Rightarrow$" $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$\exists \beta(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$

т.е. $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$

• domножим на Δx

$\Delta x \cdot \beta(\Delta x) = \Delta f - f'(x_0)\Delta x$;

$\Delta f = \beta(\Delta x) \cdot \Delta x + f'(x_0)\Delta x$

q.e.d.

„$\Leftarrow$"

„$\exists A$ и $\alpha(\Delta x)$:

$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$

и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}\right) =$

$= A = f'(x_0)$ по опр.

Произв. многочлена

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \ldots + a_n$

По т. о произв. суммы:

$(P_n(x))' = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \ldots + (a_n)'$.

$(a_n)' = 0$

$(a_k \cdot x^{n-k})' = a_k \cdot (x^{n-k})' =$

$= a_k \cdot (n-k) \cdot x^{(n-k-1)}$

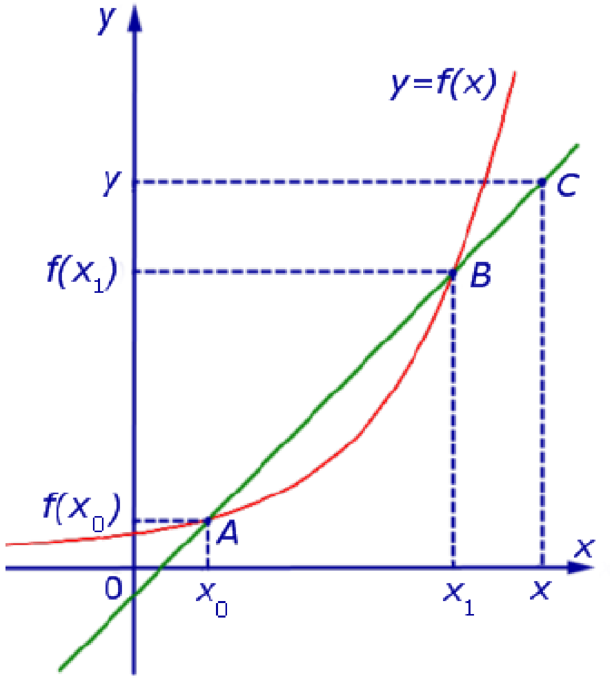
т.к. $a_k' = const$

и по т. о $(x^\alpha)'$

т.е. $P_n'(x) =$

$= a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots a_{n-1}$

3. Касательная. Определение. Критерий ее существования. Уравнение касательной. Производная a^x.



Касательная. Определение. Критерий ее существования. Уравнение касательной. Производная a^x

Секущая графика функции – прямая, проходящая через две точки графика функции.

Зафиксируем точку x_0, а вторую точку x_1 устремим к x_0. Если секущие будут стремиться к какой-нибудь прямой (координата секущей в любой точке), то назовем эту прямую касательной.

Уравнение секущей $y(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
Для любой точки x справедливо, что координаты касательной в этой точке равны

$$\lim_{x_1 \to x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Значит существование предела секущих эквивалентно существованию производной в точке.

$$y(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a$$

4. Производная суммы и произведения. Производная $arcctg(x)$

Предел произведения.

Назовём $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x);\ \Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$

$$\frac{d\big(f(x)\cdot g(x)\big)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x)+\Delta f)\cdot(g(x)+\Delta g) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x) + \Delta g\cdot f(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\Delta f\cdot\Delta g}{(\Delta x)^2}$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + g'(x) + f'(x)\cdot g'(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) + f'(x)\cdot g'(x)\cdot 0$$
$$= g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Предел суммы.

$$\frac{d\big(f(x)+g(x)\big)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)+\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x)\blacksquare$$

Производная арккотангенса.

$$(tg^{-1})'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{tg^{-1}(x+\Delta x) - tg^{-1}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{tg\big(tg^{-1}(x+\Delta x) - tg^{-1}(x)\big)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{tg\big(tg^{-1}(x+\Delta x)\big) - tg\big(tg^{-1}(x)\big)}{\Delta x\cdot\Big(1+\ tg\big(tg^{-1}(x+\Delta x)\big)\cdot tg\big(tg^{-1}(x)\big)\Big)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot(1+x^2+x\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{1+x^2+x\Delta x} = \frac{1}{x^2+1}\ \blacksquare$$

$$\sin^{-1}x = \sin^{-1}(cos(\cos^{-1}(x))) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}(x)\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x, \frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x$$
$$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \text{но это верно всегда, так как } \cos^{-1}x\in[0,\pi], \forall x$$

$$(\mathrm{ctg}^{-1})'(x) = \left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}(x)\right)'(x) = -\big(tg^{-1}(x)\big)'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

5. Производная частного. Производная arctg(x). Производная arccos(x).

Производная частного

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)\cdot f(x)\cdot f(x_0)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot f(x_0)} = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

$$\left(\frac{1}{f}\cdot g\right)' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' g(x) + \frac{1}{f(x)}\cdot g'(x) = \frac{-f'(x)g(x)}{f^2(x)} + \frac{g'(x)f(x)}{f^2(x)} = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{g}{f}\right)'$$

Производная арктангенса

$$(\mathrm{arctg}\,x_0)' = \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arctg}\,x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arctg}\,x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(1+x\cdot x_0)(x-x_0)} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

Производная арккосинуса

$$(\arccos x_0)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x_0\right)' = -(\arcsin x_0)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

Производная частного: привести к общему знаменателю.

Производная arctg(x): в пред. вопросе. (там была описка в одном рав-ве, но она пофикшена и дальнейшее равенство не поменялось)

Производная arccos(x) = $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)'(x) = -arcsin'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). Производная ctg(x).

Теорема Ферма. Пусть функция f имеет производную в точке x_0.

$\text{Если} f(x_0) - \text{точка экстремума, то} f'(x_0) = 0$

Докажем, предполагая, что x_0 — точка локального максимума.

Пусть

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$by def \lim_{x \to x_0} g(x) = f'(x_0)$$

Тогда

$\exists \delta: \forall x \in U_\delta(x_0) \text{верно} f(x_0) \geq f(x)$

Тогда

$\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \text{верно} g(x) \leq 0$

$\quad$ Значит $\lim_{x \to x_0^+} g(x) \leq 0$

$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \text{верно} g(x) \geq 0$

$\quad$ Значит $\lim_{x \to x_0^-} g(x) \geq 0$

Но мы знаем, что lim g(x) = f“(x_0), тогда левый и правый пределы равны, тогда они равны нулю, конец.

Теорема Ролля.

Пусть f определена и непрерывна на [a, b], дифференцируема на (a, b) и f(a) = f(b). Тогда существует c in (a, b) что f“(c) = 0

Доказательство: раз непрерывна на отрезке, то по теореме Вейерштрасса достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Если хотя-бы одна из них лежит на отрезке (a, b), то всё хорошо. Иначе они лежат на концах и максимум функции тогда равен минимуму, а значит функция — константа.

Теорема Лагранжа.

Пусть f определена и непрерывна на [a, b], дифференцируема на (a, b). Тогда существует c in (a, b) что f“(c) = (f(b) — f(a)) / (b — a)

Введём $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$$g(a) = g(b)$$

$$g - \text{непрерывна}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Тогда по теореме Ролля существует точка c такая что g“(c) = 0, т. е. Смотри производную, чтд

Формула конечных приращений - !!!

Иной вывод:

$\text{При} \Delta x > 0 \exists c \in (a; a + \Delta x)$:

$$\Delta f = f'(c)\Delta x$$

Вспомним определение дифференцируемости f в точке a:

$\Delta f = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)$

7. Критерий постоянства функции. Производная x^x. Достаточное условие экстремума (в терминах первой производной). Производная cos(x).

Критерий постоянства функции.

Непрерывная на промежутке функция постоянна на нём тогда и только тогда, когда производная равна нулю в любой точке этого промежутка

Если функция постоянна, то по определению (прям совсем)

Если производная ноль, то тоже на самом деле (теорема Лагранжа, для ЛЮБЫХ аргументов разность ноль)

Производная x^x.

(x^x)' = ((e^(lnx))^x)' = e^(x*lnx)*(x*lnx)' = e^(x*lnx)*(1*lnx+x*1/x) = e^(x*lnx)*(lnx+1) = (lnx+1)*x^x

Достаточное условие экстремума (в терминах первой производной).

Функция определена и дифференцируема в выколотой окрестности и непрерывна в точке

В некоторой окрестности кандидата на экстремум производная слева одного знака, а справа - другого

Например, - -> +

Взять любой x < x0, теорема Лагранжа, там производная < 0, разность координат < 0 => разность значений больше нуля

То же справа, выходит, что f(x0) < f(x) в некоторой окрестности, то есть это точка экстремума

Производная cosx.

cosx' = lim[Δx->0]((cos(x+Δx)-cosx)/Δx) =

Разность косинусов,

= lim[Δx->0]((-2*sin(x+Δx/2)*sin(Δx/2))/Δx) =

= lim[Δx->0](-sin(x+Δx/2)*sin(Δx/2)/(Δx/2)) =

Непрерывность синуса и Первый замечательнвй предел

= lim[Δx->0](-sin(x)*1) = -sinx

8. Критерий возрастания функции. Достаточное условие строгого возрастания функции. Производная $\log_a x$.

Вопрос Гоши. Текст отсутствует.

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

9. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума (в терминах второй производной). Производная arcsin(x). Производная ln(x).

Билет 9

- Необходимое условие экстремума

x_0 - точка экстремума и f дифференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$

т.к. f дифференцируема в x_0, f определена в $U_\delta(x_0)$ и $\exists f'(x_0)$

тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

- Достаточное условие экстремума в терминах второй производной

$f(x)$ определена на $U_\delta(x_0)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, значит x_0 - точка экстремума.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

По теореме о стабилизации знака:

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x \in (x_0 - \delta; x_0) & f'(x) < 0 \\ x \in (x_0; x_0 + \delta) & f'(x) > 0 \end{matrix}$$

Значит по достаточному условию экстремума в терминах первой производной x_0 - точка экстремума

- Производная арксинуса

$$(\arcsin x_0)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} \underset{\substack{\text{т.к. } \sin x \sim x \\ \text{при } x \to 0}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\arcsin x - \arcsin x_0)}{x - x_0} =$$

$$\underset{\text{формула } \sin(\alpha - \beta)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x_0) - \sin(\arcsin x_0) \cdot \cos(\arcsin x)}{x - x_0} \underset{\text{т.к. } x \in (-\pi/2; \pi/2)}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x \cdot \sqrt{1 - x_0^2} - x_0\sqrt{1 - x^2}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2(1 - x_0^2) - x_0^2(1 - x^2)}{(x - x_0)(x\sqrt{1 - x_0^2} + x_0\sqrt{1 - x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{(x - x_0)(x\sqrt{1 - x_0^2} + x_0\sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + x_0}{x\sqrt{1 - x_0^2} + x_0\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}$$

- Производная логарифма

$$(\ln x_0)' = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \underset{\text{формула } \ln a - \ln b}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0} + 1 - 1\right)}{x_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)} \underset{\substack{\ln x + 1 \sim x \\ \text{при } x \to 0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x}{x_0} - 1}{\left(\frac{x}{x_0} - 1\right) x_0} = \frac{1}{x_0}$$

(В производной логарифма нужно в конце):

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\left(\frac{x}{x_0} - 1\right) + 1\right) = \left(\frac{x}{x_0} - 1\right) \text{ по эквивалентности } \ln(\text{б. м.} + 1) = \text{б. м.}$$